UNIVERSITÀ DI BRESCIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Laboratorio di Robotica Avanzata
Advanced Robotics Laboratory

Corso di Robotica Industriale
(Prof. Riccardo Cassinis)

Gli angoli di Eulero nella robotica

Elaborato di esame di:

Nicola Bombardieri

Consegnato il: **18 novembre 2013**

Sommario

Lo scopo di questo elaborato è spiegare il funzionamento degli angoli di Eulero i quali permettono, attraverso una terna di angoli appunto, di rappresentare univocamente l'orientamento di un corpo rigido nello spazio. Più precisamente essi, a differenza di altri metodi come la matrice di rotazione, sono una rappresentazione minimale dell'orientamento del corpo, ovvero senza ridondanza. Dato il loro potenziale sono numerosi e disparati i campi in cui essi trovano impiego.

La trattazione inizierà con un breve capitolo sui sistemi di riferimento spaziali in cui saranno presentate le nozioni fondamentali per poter meglio apprendere la teoria alla base degli angoli di Eulero. Nella seconda parte saranno introdotti gli angoli di Eulero da un punto di vista teorico-matematico, mentre nel capitolo successivo si passerà ad un punto di vista più pratico, ovvero si analizzerà l'utilità di essi nella robotica. Infine la trattazione si concluderà con la presentazione e la risoluzione di un problema reale riguardante il passaggio delle coordinate spaziali ad un robot manipolatore.

1. Introduzione ai sistemi di riferimento spaziali

Il problema di rappresentare univocamente la posizione di un punto nello spazio è trattato facendo uso dei sistemi di riferimento spaziali. Grazie ad essi è infatti possibile, una volta stabilite opportune convenzioni, mappare lo spazio circostante in modo da renderlo matematicamente determinabile. Tuttavia, pur disponendo di un siffatto sistema, la rappresentazione di un corpo rigido nello spazio non è completata nel senso che non è sufficiente rappresentare la posizione di un corpo reale utilizzando meramente un punto. Utilizzando solo questa informazione (ed una volta stabilito un punto del corpo rigido, ad esempio il suo baricentro, a cui tale punto fa riferimento) è infatti possibile determinare la sua posizione nello spazio ma non il suo orientamento. Per determinare completamente la posizione (comprensiva di orientamento) di un corpo rigido nello spazio si potrebbe innanzitutto pensare di individuare più punti distinti appartenenti ad esso, anziché uno solo (si vedrà in seguito nella trattazione quanti punti siano necessari e quali caratteristiche debbano avere). Sebbene questa rappresentazione potrebbe in realtà funzionare, la modalità tipicamente utilizzata è quella di rappresentare la posizione facendo uso di un solo punto, corredato però da informazioni che permettono anche di determinare l'orientamento spaziale del corpo rigido (e.g. matrici di rotazione oppure angoli di Eulero).

1.1. Il sistema cartesiano con coordinate omogenee

Il sistema cartesiano mappa lo spazio facendo uso di tre assi (gli assi cartesiani appunto) ortogonali fra loro e tutti con la medesima origine (origine degli assi cartesiani o zero). Una volta determinato un verso positivo per ciascuno dei tre assi è possibile rappresentare un qualunque punto dello spazio circostante con una semplice terna di numeri. Formalmente quindi un punto p è rappresentato dal seguente vettore di coordinate cartesiane:

$$\mathrm{p} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Il medesimo punto p può anche essere rappresentato facendo uso delle coordinate omogenee, le quali fanno invece uso di una quaterna di numeri per rappresentare un punto dello spazio:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ tale che: } w \neq 0 \text{ , } X = \frac{x}{w} \text{ , } Y = \frac{y}{w} \text{ , } Z = \frac{z}{w} \text{ .}$$

La rappresentazione dello spazio in coordinate omogenee presenta due principali proprietà:

1. Le coordinate sono definite a meno di un fattore di proporzionalità, il che significa che ogni punto dello spazio può in realtà essere rappresentato in infiniti modi (al variare di w). Ad esempio il punto [x,y,z,1]' è equivalente ad uno qualunque del tipo [kx,ky,kz,k]' con $k \neq 0$.
2. Ponendo w = 0 è possibile rappresentare, anziché punti, delle direzioni nello spazio (i cosiddetti punti impropri). Ad esempio il punto improprio p = [x,y,z,0]' rappresenta il vettore con origine nell'origine degli assi e passante per il punto p (con direzione uscente dall'origine verso p).

Esistono quindi, oltre agli infiniti punti reali dello spazio, quattro punti particolari rappresentabili tramite coordinate omogenee:

- I tre versori dei tre assi cartesiani (e.g. [1,0,0,0]' versore dell'asse X);
- L'origine degli assi, ovvero [0,0,0,1]'.

Concludendo, le coordinate omogenee sono in realtà un espediente matematico creato per ottenere, oltre alle suddette proprietà, anche il seguente vantaggio: tutte le principali trasformazioni geometriche (rotazioni, traslazioni e rototraslazioni) possono essere rappresentate facendo uso di semplici prodotti matriciali, come sarà mostrato nei paragrafi successivi.

1.2. Il sistema polare

Il sistema polare è in realtà un sistema di riferimento per rappresentare un punto nello spazio a due dimensioni (su un piano). Nonostante esistano due estensioni naturali di questo sistema per lo spazio tridimensionale (il sistema cilindrico ed il sistema sferico), verrà trattato solo il più semplice caso bidimensionale, dal momento che è sufficiente per gli scopi di questa trattazione.

Un punto bidimensionale in coordinate polari è determinato univocamente da due valori numerici:

1. ρ che rappresenta la distanza del punto dall'origine degli assi;
2. φ che è l'angolo formato dal vettore che congiunge l'origine con il punto stesso.

Considerando infatti la prima informazione (la distanza ρ) è infatti possibile tracciare una circonferenza immaginaria ed affermare che il punto giace su di essa. A questo punto per determinarlo bisogna stabilire di quanto spostarsi su questa circonferenza (tramite l'angolo φ che varia da 0 a 2pi). Ragionando in quest'ottica è semplice determinare le formule per passare da coordinate polari a cartesiane e viceversa. Nel primo caso si hanno le seguenti:

$$x = \rho \cos(\varphi) \text{ , } y = \rho \sin(\varphi) \text{ .}$$

Per passare da coordinate cartesiane a polari si hanno invece le seguenti formule:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ , } \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ .}$$

1.3. Traslazioni

Una traslazione di un punto p nello spazio consiste nella trasformazione di quel punto in un'altro che si trova in un posizione dello spazio differente. Il problema, trattato utilizzando le coordinate omogenee, è il seguente:

passare dal punto $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ al punto $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$

ovvero traslare il punto interessato di un valore *a* lungo l'asse x, di *b* lungo y e di *c* lungo z.

Dal momento che, come detto precedentemente, il principale vantaggio delle coordinate omogenee è la possibilità di rappresentare ogni trasformazione geometrica tramite prodotti matriciali, allora deve necessariamente essere possibile definire una matrice H tale che:

$$\mathrm{H} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix} .$$

E' immediato giungere alla conclusione che la matrice H cercata, detta matrice di traslazione, è la seguente:

$$\mathrm{H} = \mathrm{Trasl}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In conclusione dato un punto P1, al fine di passare al punto P2 ottenuto traslandolo di *a,b,c* lungo i tre assi, una volta calcolata la matrice di traslazione H è sufficiente applicare la seguente trasformazione (semplice moltiplicazione matriciale):

$$\mathrm{P2} = \mathrm{H}\ \mathrm{P1} .$$

1.4. Rotazioni

La rotazione è un particolare tipo di trasformazione che sposta i punti di un corpo nello spazio in modo rigido, ovvero mantenendo intatta la forma del corpo ma in modo tale che esiste una retta (se ci troviamo in uno spazio a tre dimensioni) sulla quale i punti non cambiano posizione (l'asse di rotazione). Questo paragrafo tratta semplici rotazioni attorno ad uno fra gli assi cartesiani. La rotazione intorno ad uno degli assi principali è infatti molto più semplice da trattare rispetto ad una rotazione attorno ad un asse generico. Tuttavia una volta appreso tale meccanismo è possibile combinare in modo opportuno più operazioni elementari attorno agli assi cartesiani per generare una qualunque rotazione.

Si consideri quindi come esempio una rotazione attorno all'asse Z. Ciascun punto del corpo in rotazione ruota intorno a tale asse, il che significa che si muove su un piano parallelo agli altri assi X e Y mantenendo quindi invariato il valore lungo l'asse Z. E' possibile quindi trasformare un generico punto in coordinate polari (come se fossimo su un piano quindi) esplicitando solo le variabili x ed y (dal momento che z resta invariato). Sia quindi P il punto iniziale e Q quello finale,ottenuto ruotando P lungo l'asse Z di un angolo pari a θ. Le coordinate x e y di P possono dunque essere scritte nel seguente modo:

$$xp = \rho \cos(\varphi) \ , \ yp = \rho \sin(\varphi) .$$

Utilizzando la notazione polare è immediato ricavare le coordinate del trasformato Q:

$$xq = \rho \cos(\varphi+\phi) \ , \ yq = \rho \sin(\varphi+\phi) .$$

Applicando infine le formule di addizione si ricavano facilmente le coordinate del punto ruotato Q in funzione del punto iniziale P e dell'angolo di rotazione ϕ:

$$xq = xp\ \cos(\phi)\ \text{-}\ yp\ \sin(\phi)$$

$$yq = yp\ \cos(\phi) + xp\ \sin(\phi)$$

$$zq \text{ invariato .}$$

Trovandoci nuovamente in coordinate omogenee (abbiamo infatti i valori di x,y,z e poniamo w=1) è possibile cercare una matrice H, detta matrice di rotazione, in grado di trasformare P nel punto Q (ottenuto ruotando P di un angolo ϕ utilizzando l'asse Z come asse di rotazione), ovvero tale che $Q = HP$. Utilizzando i valori di *xq* e *yq* ricavati sopra si può impostare la relazione

$$\begin{bmatrix} xq \\ yq \\ zq \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xp \cdot \cos(\phi) - yp \cdot \sin(\phi) \\ xp \cdot \sin(\phi) + yp \cdot \cos(\phi) \\ zp \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava il valore di H, matrice di rotazione lungo l'asse Z:

$$\text{H} = \text{Rot}(\text{Z}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{-}\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente si trovano anche le matrici di rotazione lungo gli altri due assi:

$$\text{Rot}(\text{X}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{-}\sin(\phi) & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(\text{Y}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5. Composizione di trasformazioni

Le trasformazioni viste nei paragrafi precedenti possono essere definite elementari nel senso che effettuando un numero finito di composizioni di quelle è possibile rappresentare una qualunque rototraslazione generica (ed esempio una rotazione attorno ad un asse qualunque seguita da una traslazione). Per fare ciò è necessario conoscere delle semplici regole che illustrano come ottenere la matrice di trasformazione finale derivante dalla composizione di più matrici di rotazione e/o traslazione in sequenza.

Una combinazione di trasformazioni può essenzialmente avvenire in due modi, dal punto di vista del sistema di riferimento utilizzato. Si immagini un caso di combinazione semplice in cui si vuole effettuare una traslazione seguita da una rotazione: si hanno quindi due trasformazioni da combinare. Il primo caso da analizzare è quello in cui entrambe le matrici di trasformazione sono riferite al medesimo sistema di riferimento. Sia T la prima matrice (di traslazione) e sia R la seconda (di rotazione): si vuole ricavare la matrice H risultante dalla combinazione di T e R, la quale permetterebbe quindi di eseguire la trasformazione globale in un unico passaggio. Sia P1 il punto di partenza, P2 il punto trovato dopo la prima traslazione e P3 il punto finale, ottenuto dopo l'ultima operazione di rotazione. Valgono le seguenti relazione, ricavate applicando le trasformazioni elementari:

$$P2 = T\,P1 \;\; , \;\; P3 = R\,P2\ .$$

Con una semplice sostituzione si ricava che:

$$P3 = R\,T\,P1 = H\,P1 \;\; \textit{quindi}\; H = R\,T\ .$$

Pertanto la matrice H risultante dalla composizione delle due trasformazione è data dalla moltiplicazione delle due matrici in ordine inverso rispetto a quello delle trasformazioni stesse. Questa regola è nota come premoltiplicazione delle matrici di trasformazione e si applica quando le trasformazioni sono tutte riferite al medesimo sistema di riferimento di partenza.

Il secondo caso si verifica invece quando le matrici di trasformazione sono date man mano rispetto al sistema di riferimento da cui parte la trasformazione stessa: si ha quindi un continuo cambio di sistema di riferimento ad ogni trasformazione. Applicando le regole del cambio di base si ricava la cosiddetta regola della postmoltiplicazione secondo la quale, allo scopo di trovare la matrice H risultante dalla trasformazione globale, le singole matrici di trasformazione vanno ora moltiplicate nel medesimo ordine in cui le trasformazioni sono applicate. Rifacendosi all'esempio visto sopra, nel caso in cui la seconda matrice di trasformazione R (di rotazione) fosse data facendo riferimento al nuovo sistema (riferito quindi al punto P2 da cui essa parte), la matrice H (per passare direttamente da P1 a P3) sarebbe:

$$H = T\,R\ .$$

2. Angoli di Eulero

2.1. Rappresentazione di un corpo rigido nello spazio e gradi di libertà

Si riconsideri il problema di rappresentare univocamente un corpo rigido nello spazio. Nel capitolo precedente è stato mostrato come, tramite un sistema di riferimento spaziale in coordinate omogenee, sia possibile fissare opportune convenzioni (e.g. l'origine degli assi nello spazio) e determinare la posizione e l'orientamento del corpo. Si consideri infatti un corpo rigido nello spazio e due sistemi di riferimento: uno fisso con origine in un punto scelto dello spazio ed un altro sistema solidale invece con lo stesso corpo. Si può dimostrare che una qualunque posizione del corpo nello spazio può essere descritta tramite una rotazione del corpo seguita da una traslazione. Sono stati utilizzati due sistemi di riferimento in quanto sia la rotazione che la traslazione vengono espresse come trasformazioni del sistema solidale col corpo rispetto a quello fisso. Un espediente di questo tipo è necessario in quanto non è sufficiente rappresentare il corpo rigido tramite un semplice punto al fine di identificarlo univocamente nello spazio. Con un punto infatti si potrebbe al massimo descrivere la posizione del centro di massa del corpo, ma non l'orientamento. Si noti come nemmeno due punti sarebbero sufficienti a determinare una qualunque posizione in quanto di perderebbe l'informazione relativa ad una rotazione attorno all'asse passante per i due punti stessi. Per questi motivi, anche se con tre punti scelti opportunamente si potrebbe in effetti identificare univocamente il corpo nello spazio, si preferisce *attaccare* una sorta di cornice al corpo solido, ovvero un sistema di riferimento fisso solidale con lo stesso, al quale riferire le trasformazioni.

Ci si chiede ora se la rappresentazione appena illustrata sopra, oltre a funzionare correttamente, sia anche una rappresentazione minimale. Quanto visto può essere formalizzato nel modo seguente, ovvero ogni rototraslazione del corpo rigido nello spazio può essere rappresentata dalla seguente relazione:

$$q' = R\,q + d$$

dove q e q' rappresentano il corpo (o meglio ogni punto del corpo) rispettivamente prima e dopo la rototraslazione, d rappresenta la traslazione ed R la rotazione. Mentre il vettore d contiene 3 parametri la matrice di rotazione R ne contiene ben 9. D'altro canto è risaputo che i gradi di libertà di un corpo rigido nello spazio sono 6: 3 gradi per la traslazione e 3 per la rotazione. Il vettore d è quindi una rappresentazione minimale della traslazione del corpo, in quanto contiene un numero di variabili indipendenti pari al numero di gradi di libertà (ovvero 3). D'altra parte invece la matrice R non lo è in quanto utilizza 9 parametri per rappresentare i 3 gradi di libertà di traslazione. Questo significa che i 9 parametri sono in realtà linearmente dipendenti e che potrebbero essere ricondotti ai 3 minimali. Si può infatti dimostrare che i 9 parametri della matrice di rotazione sono vincolati alla relazione

$$R\,R' = I$$

la quale fissa da sola ben 6 parametri; i rimanenti 3 sono ovviamente fissati dai 3 gradi di rotazione effettivi.

Se si vuole perseguire l'idea di utilizzare una rappresentazione minimale anziché ridondata è necessario cambiare modo di rappresentare il corpo rigido nello spazio. Più precisamente si vuole semplicemente rimpiazzare la matrice di rotazione con qualcosa di minimale, che faccia quindi uso di soli 3 parametri: gli angoli di Eulero rispondono a questa esigenza.

2.2. Gli angoli di Eulero: una rappresentazione minimale dell'orientamento

Anzitutto anche con gli angoli di Eulero è necessario utilizzare un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso ma, contrariamente alla matrice di rotazione, la rotazione finale è descritto in modo minimale attraverso 3 valori di rotazione attorno agli assi coordinati. In realtà ciascuna di queste tre rotazioni può avvenire su uno qualunque dei tre assi a patto di rispettare il seguente vincolo: non possono avvenire due rotazioni consecutive attorno allo stesso asse (se così fosse infatti le due rotazioni potrebbero essere ricondotte ad una sola sommando banalmente gli angoli di rotazione, in quanto avvengono sullo stesso asse). Si possono quindi ottenere svariate combinazioni e ciascuna di esse è di fatto un caso particolare di angoli di Eulero. Questa prima considerazione è molto importante, in quanto stabilisce che prima di utilizzare gli angoli di Eulero per rappresentare l'orientamento di un corpo rigido nello spazio è necessario fissare una convenzione, nello specifico una terna di assi nel rispetto del vincolo visto. Tuttavia questa terna di assi non è l'unico elemento da decidere e fissare, come viene spiegato di seguito.

Le rotazioni attraverso i tre assi scelti possono avvenire in due modi diversi. Se esse sono tutte riferite agli assi del sistema di riferimento fisso (che in origine corrisponde comunque al sistema solidale con il corpo) si parla di rotazione estrinseca. Al contrario si può anche decidere di adottare un metodo alternativo, ovvero riferire le rotazioni rispetto al sistema di riferimento solidale con il corpo, che però evidentemente cambia orientamento dopo ogni rotazione elementare: in questo caso si parla di rotazione intrinseca. I due modi di rappresentare le rotazioni sono in realtà equivalenti tra loro, nel senso che una terna di rotazioni estrinseche può essere facilmente ricondotta ad una terna intrinseca considerando gli stessi assi e valori di rotazione, ma invertendo l'ordine delle rotazioni elementari (in accordo con le regole di premoltiplicazione e postmoltiplicazione viste nel primo capitolo).

2.3. Terne note di angoli di Eulero

Una qualunque terna di assi col rispetto dei vincoli visti sopra rappresenta dunque un possibile modo di utilizzare gli angoli di Eulero. In realtà esiste però una convenzione, da un punto di vista puramente terminologico, secondo la quale le terne che si possono definire di Eulero sono solamente quelle con il primo asse coincide con l'ultimo. Tutte le terne che invece sono formate da una qualunque disposizione dei tre assi distinti viene definita di Tait-Bryan. Di seguito è presente l'elenco dei possibili angoli di Eulero seguito dall'elenco dei possibili angoli di Tait-Bryan:

- terne di Eulero: (z-x-z, x-y-x, y-z-y, z-y-z, x-z-x, y-x-y) ;
- terne di Tait-Bryan: (x-y-z, y-z-x, z-x-y, x-z-y, z-y-x, y-x-z) .

Si ricordi inoltre che ogni terna può essere indifferentemente riferita a rotazioni intrinseche oppure estrinseche, per un totale quindi di 24 terne (12 estrinseche e 12 intrinseche).

Di seguito vengono descritte in dettaglio due terne di rilevante importanza, una appartenente alla categoria degli angoli di Eulero ed un'altra agli angoli di Tait-Bryan.

2.3.1. La terna di Eulero z-x-z (precessione-nutazione-spin)

Questa terna è una delle più importanti, tanti autori infatti si riferiscono in modo generico agli angoli di Eulero descrivendo in realtà questa specifica terna. In questo caso i tre angoli di Eulero corrispondono alle rotazioni da effettuare lungo gli assi z,x,z relativamente al sistema di riferimento mobile, solidale quindi con il corpo stesso in rotazione (si parla quindi di rotazioni intrinseche per questa configurazione). Detti rispettivamente α, β, γ i tre angoli, le tre rotazioni da effettuare sono dunque le seguenti:

1. prima rotazione di α attorno all'asse z del sistema di riferimento solidale con il corpo;
2. seconda rotazione di β attorno al nuovo asse x del sistema di riferimento ruotato (x');
3. terza rotazione di γ attorno al nuovo asse z del sistema di riferimento ruotato (z'').

E' possibili visualizzare queste tre rotazioni con l'aiuto di un oggetto particolare presente in **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**- a: si tratta del giroscopio.

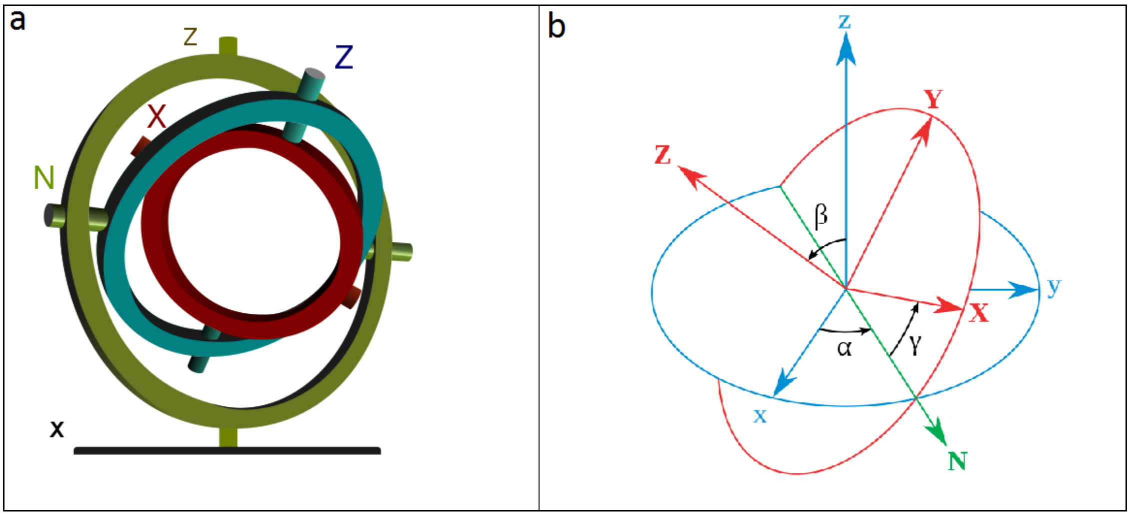

Fig. 1 - Figura 2-1

Se si immagina il giroscopio con tutti i tre anelli ben allineati, ovvero uno dentro l'altro come se stessero sullo stesso piano, ci si trova allora nella condizione iniziale. Si può in seguito far compiere una prima rotazione all'anello esterno in verde, ovviamente attorno all'asse a cui è vincolato. Successivamente si effettua una rotazione dell'anello blu, il quale ha un asse di rotazione ortogonale al precedente, per poi far ruotare infine l'anello rosso più interno, raggiungendo quindi l'orientamento desiderato. Se si immagina che il corpo rigido sia vincolato all'anello più interno del giroscopio, allora si può affermare che è sempre possibile trovare una terna di angoli di Eulero che lo fa orientare nel modo voluto.

Si immagini invece per assurdo che i due anelli esterni (verde e blu) del giroscopio siano vincolati a ruotare sul medesimo asse, ad esempio si supponga che l'anello verde sia vincolato a ruotare lungo l'asse N, così come l'anello successivo blu: ci troveremmo in una condizione con una terna del tipo x-x-z, la quale per definizione non può essere considerata una terna di angoli di Eulero (ci sono due assi uguali e contigui), ed infatti con questa configurazione sarebbe impossibile raggiungere una qualunque configurazione (si perde la rotazione attorno ad un asse, quindi si perde un grado di libertà).

Da un punto di vista geometrico invece i tre angoli possono essere visti secondo un'altra prospettiva, spiegata di seguito. Prima però è necessario definire la cosiddetta linea dei nodi N. Sia XYZ il sistema di riferimento solidale con il corpo (ruotante) e xyz il sistema di riferimento fisso: la linea dei nodi N è data dalla retta che interseca i due piani XY e xy, qualora questi siano distinti; nel caso in cui essi coincidano invece la linea dei nodi N è l'asse X. A questo punto è possibile dare la definizione geometrica dei tre angoli di Eulero (si faccia riferimento alla Figura 2-1-b):

- α (o angolo di precessione) è l'angolo tra l'asse x e la linea dei nodi N;

- β (o angolo di nutazione) è l'angolo tra gli assi z e Z;
- γ (o angolo di spin) è l'angolo tra la linea dei nodi N e l'asse X.

La prima rappresentazione vista, la quale descrive come devono avvenire le tre rotazioni senza fare uso della linea dei nodi, è certamente più intuitiva e facile da apprendere. Tuttavia quest'ultima rappresentazione, di tipo geometrico, permette una visualizzazione immediata dei tre angoli in un'unica immagine. Si tenga comunque ben presente che entrambi sono due modi differenti per visualizzare la medesima terna di angoli di Eulero.

2.3.2. La terna di Tait-Bryan z-y-x (rollio-beccheggio-imbardata)

Anche questa terna è molto importante in quanto rappresenta di fatto uno standard, nel campo dell'aeronautica soprattutto, per la rappresentazione dell'orientamento di corpi rigidi nello spazio. Inoltre essendo definita sui tre assi cardinali distinti, risulta più immediato e forse naturale comprenderne il significato. Come per ogni altra terna di assi, è necessario decidere in quale delle due modalità possibili effettuare le rotazioni (in modo intrinseco oppure estrinseco). Se considerassimo rotazioni intrinseche avremmo un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido: se quest'ultimo fosse un aeroplano, seguendo le convenzioni in campo aeronautico, avremmo un sistema di riferimento la cui origine coinciderebbe con il baricentro dell'aereo stesso, come mostrato in Figura 2-2-a.

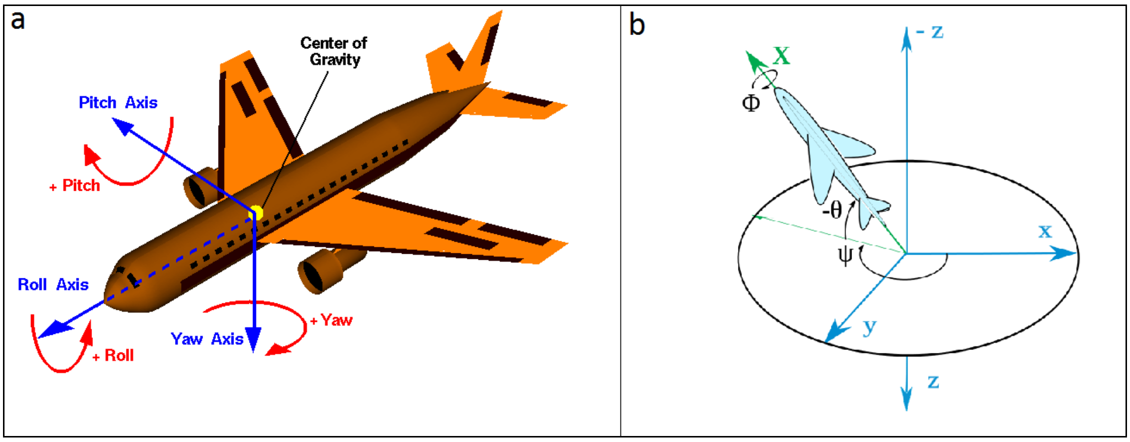

Fig. 2 - Figura 2-2

Le rotazioni del velivolo attorno ai tre assi permettono di effettuare rispettivamente i movimenti di rollio (roll) intorno all'asse z, di beccheggio (pitch) intorno all'asse y e di imbardata (yaw) attorno a x. In termini pratici il rollio è la rotazione dell'aereo attorno alla sua stessa fusoliera; il beccheggio permette di puntare l'aereo più in alto o più in basso ruotando attraverso un asse immaginario passante per le ali; infine il movimento di imbardata permette all'aereo di virare mantenendosi allineato al piano orizzontale.

Ora si consideri invece il caso in cui le rotazioni vengono definite in modo estrinseco, ovvero relativamente ad un sistema di riferimento (z-x-y) fisso, che può ad esempio essere supposto solidale con la terra. La Figura 2-2-b mostra proprio questo secondo caso. Il sistema di riferimento in blu è ovviamente quello fisso. Si noti come anche effettuando rotazioni estrinseche sia presente un sistema di riferimento solidale con l'aereo (in figura si vede solo l'asse X in verde), ma i tre angoli sono tutti espressi relativamente al sistema fisso (se i tre angoli venissero posti a zero i due sistemi coinciderebbero). Tuttavia anche in questo caso la nomenclatura per i tre angoli si mantiene identica, rispettivamente di rollio, di beccheggio e di imbardata.

Proseguendo e scegliendo come modalità di rotazione quella estrinseca (contrariamente all'esempio del giroscopio), ovvero riferendo tutti gli angoli al sistema di riferimento fisso, come appena mostrato in Figura 2-2-b, detti α, β, γ i tre angoli di Tait-Bryan, bisogna effettuare le seguenti tre rotazioni per portare il corpo nell'orientamento corretto:

1. rotazione di α attorno all'asse x del sistema fisso (che comunque all'inizio coincide con il sistema mobile);
2. rotazione di β attorno all'asse y del sistema fisso (che ormai non coincide più con l'asse y del sistema mobile);
3. rotazione di γ attorno all'asse z del sistema fisso.

Si noti che rispetto al caso precedente (precessione-nutazione-spin con rotazione intrinseca), l'ordine delle rotazione (x-y-z) è inverso rispetto a quello della terna di assi (z-x-y) dal momento che si stanno effettuando rotazioni estrinseche. Si può intuire la correttezza di ciò ripensando alle regole di premoltiplicazione e postmoltiplicazione del capitolo introduttivo sui sistemi di riferimento spaziali: comunque nel paragrafo successivo ne verrà provata la veridicità.

2.4. Conversioni con le matrici di rotazione

Come mostrato nel primo capitolo le matrici di rotazione, pur non essendo una rappresentazione minimale come gli angoli di Eulero, sono un valido strumento per rappresentare l'orientamento di un corpo rigido nello spazio. Risulta quindi di naturale interesse poter convertire un orientamento espresso con gli angoli di Eulero (o Tait-Bryan) nella matrice di rotazione equivalente, o viceversa passare dalla matrice ai tre angoli.

2.4.1. Convertire da una terna di Eulero alla matrice di rotazione

Una prima considerazione da effettuare, il punto di incontro in un certo senso fra le due rappresentazioni, è la seguente. Da un lato gli angoli di Eulero descrivono l'orientamento come il risultato di tre rotazioni attorno a tre assi ortogonali; d'altro canto siamo in grado di rappresentare senza problemi la matrice di rotazione relativa ad una rotazione elementare attorno ad un asse cardinale. Per ottenere poi l'orientamento finale considerando tutte le 3 rotazioni, è sufficiente calcolarsi prima le 3 matrici di rotazioni e poi combinarle (moltiplicarle) prestando attenzione alle regole di premoltiplicazione e postmoltiplicazione. Più specificamente nel caso in cui i tre angoli di Eulero siano dati secondo il criterio delle rotazioni intrinseche (rispetto cioè al sistema mobile solidale con il corpo) bisognerà usare logicamente la regola della postmoltiplicazione, ovvero le 3 matrici vanno moltiplicate nel medesimo ordine in cui i relativi assi di rotazione compaiono nella terna. Di seguito è presente un esempio che fa riferimento alla terna di x-y-z con rotazione intrinseca. Sia $X(\alpha)$ la matrice di rotazione relativa alla prima rotazione di un angolo α attorno all'asse X, $Y(\beta)$ e $Z(\gamma)$ le altre due, $R(\alpha, \beta, \gamma)$ la matrice finale cercata, la formula cercata è la seguente:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = X(\alpha)\, Y(\beta)\, Z(\gamma)\ .$$

Nel caso opposto invece in cui la terna di Eulero è data secondo il criterio delle rotazioni estrinseche (rispetto quindi al sistema fisso), mantenendo invariate le convenzioni sulla nomenclatura, la matrice di rotazione finale è data dalla seguente formula, in accordo con la regola di premoltiplicazione:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = Z(\gamma)\, Y(\beta)\, X(\alpha)\ .$$

Il problema di passare dalla terna di angoli di Eulero alla matrice di rotazione equivalente si riduce quindi a trovare le matrici corrispondenti alle 3 rotazioni elementari. Si ricorda che il calcolo della matrice di rotazione attorno ad un asse cardinale è stato già affrontato nel primo capitolo ed è un'operazione abbastanza semplice. Si consideri come esempio il problema di convertire la terna di rotazioni intrinseche z-y-z (precessione-nutazione-spin simile all'esempio in precedente). Il problema si riduce al calcolo delle matrici $Z(\alpha)$, $Y(\beta)$ e $Z(\gamma)$. Per ricavarle è sufficiente utilizzare le formule generali (viste nel capitolo delle rotazioni) delle matrici di rotazione attorno agli assi z e y. Omettendo il calcolo di tali matrici (in quanto si ridurrebbe banalmente a sostituire nelle formule le variabili α, β, γ alla generica variabile ϕ) la matrice di rotazione finale si trova postmoltiplicando (perché le rotazioni sono intrinseche) tali matrici:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = Z(\alpha)\, Y(\beta)\, Z(\gamma) = Rot(Z, \alpha)\, Rot(Y, \beta)\, Rot(Z, \gamma)\ .$$

Il risultato finale, alleggerendo la notazione utilizzando le lettere C e S al posto di sin e cosin con il relativo argomento a predice (e.g. $C\alpha = \cos(\alpha)$), è la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} C\alpha \cdot C\beta \cdot C\gamma - S\beta \cdot S\gamma & -C\alpha \cdot C\beta \cdot S\gamma - S\alpha \cdot C\gamma & C\alpha \cdot S\beta \\ S\alpha \cdot C\beta \cdot C\gamma - C\beta \cdot S\gamma & -S\alpha \cdot C\beta \cdot S\gamma - C\alpha \cdot C\gamma & S\alpha \cdot S\beta \\ -S\beta \cdot C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & C\beta \end{bmatrix}$$

Riassumendo quindi, per convertire una terna di angoli di Eulero nella matrice di rotazione equivalente bisogna effettuare i seguenti passaggi:

- calcolare le 3 matrici di rotazioni elementari attorno agli assi cardinali identificati dalla specifica terna in questione;
- calcolare la matrice di rotazione finale premoltiplicando (in caso di rotazioni estrinseche) o postmoltiplicando (in caso di rotazioni intrinseche) tali matrici.

2.4.2. Convertire dalla matrice di rotazione ad una terna di Eulero

Passiamo ora al problema inverso, ovvero al calcolo di una terna di angoli di Eulero a partire da una qualunque matrice di rotazione, problema che si rivela ben più complesso del precedente. Mentre infatti per quanto riguarda il passaggio dalla terna di angoli alla matrice è stato possibile fornire un metodo universale, per il problema inverso non esiste una sequenza di passaggi ben definita per arrivare facilmente alla conversione. La strada tipicamente seguita consiste nell'analizzare la formula della specifica matrice di rotazione da convertire, nella quale ogni elemento è formato da prodotti di seni e coseni degli angoli di rotazione, alle ricerca di relazioni che permettano di ricavare i valori degli angoli stessi. Viene presentato di seguito un esempio relativo alla matrice calcolata precedentemente per il problema opposto (terna z-y-z con rotazioni intrinseche): si tenga ben presente che quello presentato non è un procedimento universale valido per ogni terna.

Innanzitutto introduciamo la funzione atan2(y,x) la quale associa ai due valori y,x il valore relativo all'arcotangente di $\frac{y}{x}$. Il vantaggio nell'utilizzo di atan2 consiste nel fatto che, analizzando il segno del numeratore x e del denominatore y, essa è in grado di determinare univocamente l'angolo. Al contrario invece la funzione arcotangente classica è soggetta ad un'indeterminazione fra primo o terzo quadrante e analogamente tra secondo e quarto, ovvero fornisce due possibili output in un certo senso (per una definizione più formale di atan2 si consulti *4.2: Conversione nelle coordinate del robot*). Sia quindi R la matrice di rotazione di partenza (identica a sopra) e sia Rij l'elemento di R relativo alla riga i e colonna j, ovvero:

$$R = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 \\ R21 & R22 & R23 \\ R31 & R32 & R32 \end{bmatrix}$$

Si considerino ora le seguenti formule per trovare α, β e γ:

$$\beta = atan2\left(\sqrt{R31^2 + R32^2}, R33\right)$$

se $sin(\beta) \neq 0$

$$\gamma = atan2(R32, -R31)$$

$$\alpha = atan2(R23, R13)$$

altrimenti se $sin(\beta) = 0$

$$\gamma = 0$$

$$\alpha = atan2(R21, R11)$$

Verifichiamo la correttezza delle formule nel primo caso in cui *sin(β)* $\neq 0$. Per fare ciò è sufficiente sviluppare le formule viste sopra e verificare che portino effettivamente alla soluzione cercata.

- $atan2\left(\sqrt{R31^2+R32^2}, R33\right) = atan2\left(\sqrt{(S\beta)^2(C\gamma)^2+(S\beta)^2(S\gamma)^2}, C\beta\right) =$
  $atan2\left(\sqrt{(S\beta)^2[(C\lambda)^2+(S\gamma)^2]}, C\beta\right) = atan2\left(\sqrt{(S\beta)^2}, C\beta\right) = atan2\left(S\beta, C\beta\right) = \beta$
- $atan2(R32, -R31) = atan2(\mathrm{S}\beta\cdot\mathrm{S}\gamma, \mathrm{S}\beta\cdot\mathrm{C}\gamma) = atan2(\mathrm{S}\gamma, \mathrm{C}\gamma) = \lambda$
- $atan2(R23, R13) = atan2(\mathrm{S}\alpha\cdot\mathrm{S}\beta, \mathrm{C}\alpha\cdot\mathrm{S}\beta) = atan2(\mathrm{S}\alpha, \mathrm{C}\alpha) = \alpha$

Per capire invece il caso particolare in cui *sin(β)=0*, e quindi *β=0*, bisogna considerare la specifica terna in questione, ovvero z-y-z: se l'angolo *β* è nullo significa che la rotazione corrispondente a *y* è nulla, il che significa a sua volta che la terza rotazione attorno a *z* avviene ancora lungo il primo asse *z* (in quanto questo non è stato variato dalla seconda rotazione, essendo stata nulla). Di conseguenza esistono infinite coppie (α,γ) in grado di conferire la medesima rotazione finale (l'unico vincolo è che la loro somma sia pari alla rotazione cercata). Si procede quindi fissando a priori arbitrariamente uno dei due angoli, in questo caso *γ*, fissandolo a 0 per semplice comodità. A questo punto *α* è ricavato di conseguenza (si sviluppi la formula analogamente alle precedenti per verificare ciò).

Un paio di considerazioni conclusive sono degne di nota. In primis si tenga ben presente che per convertire da matrice di rotazione ad angoli di Eulero bisogna comunque sapere (o comunque decidere) a priori a quale specifica terna si fa riferimento. Del resto si è detto in precedenza che non ha alcun senso parlare di angoli di Eulero senza fare le dovute premesse sulla terna utilizzata e sul tipo di rotazioni considerate. Si tenga quindi presente che le formule viste sopra sono valide solamente per la specifica terna z-y-z (con rotazioni intrinseche). Certamente esistono molte analogie con tutti gli altri casi, ma una formula generale non esiste: è necessario analizzare ogni volta gli elementi della matrice di rotazione R.

Si noti che quanto appena detto non significa affatto vincolare a convertire la matrice di rotazione nella terna di Eulero di partenza (nella realtà ciò non avrebbe alcun senso in quanto con ogni probabilità si disporrebbe solamente della matrice di rotazione in forma numerica). Data una qualunque matrice di rotazione R (espressa in forma numerica si intende) è sempre e comunque possibile decidere a priori a quale terna di Eulero si vuole effettuare il passaggio, a patto ovviamente di disporre delle formule per la conversione. Questo significa che con le formule viste sopra si è in grado di convertire una qualunque matrice di rotazione R nei tra angoli *α, β, γ* relativi alla terna z-y-z con rotazioni intrinseche.

2.4.3. Convertire da una terna di Eulero ad un'altra terna di Eulero

Il fatto di disporre del set di formule per convertire una generica matrice R in una specifica terna di Eulero è interessante anche perché porta a un altro risultato. Se infatti sono forniti più set di formule (simili a quelle viste sopra) ciascuno per convertire (da R) ad una diversa terna di Eulero, è possibile utilizzare la matrice di rotazione stessa come punto comune per convertire fra loro diverse terne di Eulero. Se ad esempio si vuole convertire la terna x-y-z (di Tait-Bryan quindi) nella terna z-x-z (di Eulero) è sufficiente disporre delle formule per convertire da matrice di rotazione R a terna di Eulero z-x-z, infatti si possono eseguire i seguenti passaggi:

- converto la terna x-y-z nella matrice di rotazione R (nel semplice modo visto);
- converto la matrice R nella terna z-x-z (con le formule specifiche per quella terna).

3. Angoli di Eulero e robotica

Gli angoli di Eulero sono molto importanti in svariati ambiti. Alcune terne sono diventate uno standard di fatto per la rappresentazione dell'orientamento di un corpo (si considerino ad esempio le terne con i tre assi distinti, rollio-beccheggio-imbardata, ampliamente usate nel campo del'aereonautica). In questo capitolo si cercherà di analizzare l'utilità degli angoli di Eulero nel campo della robotica: sarà quindi introdotta la cinematica dei robot, disciplina entro la quale gli angoli di Eulero trovano impiego.

Dal momento che per trattare in modo esauriente la cinematica si esulerebbe dagli scopi di questa trattazione, considerando l'obiettivo di questo elaborato, si è cercato di introdurre e spiegare solo i concetti necessari per capire l'impiego degli angoli di Eulero nella robotica.

3.1. Introduzione alla cinematica dei robot

La cinematica dei robot è la disciplina che studia il legame fra le variabili indipendenti dei giunti del robot e le posizioni dei giunti stessi. Un robot industriale può infatti essere schematizzato come una sequenza di link connessi fra loro da giunti. Paragonando un braccio robotico ad un braccio umano, i link rappresentano le parti rigide del braccio mentre i giunti corrispondono alle articolazioni. In entrambi i casi lo scopo dei giunti è fornire i gradi di libertà necessari al raggiungimento di punti specifici nello spazio circostante.

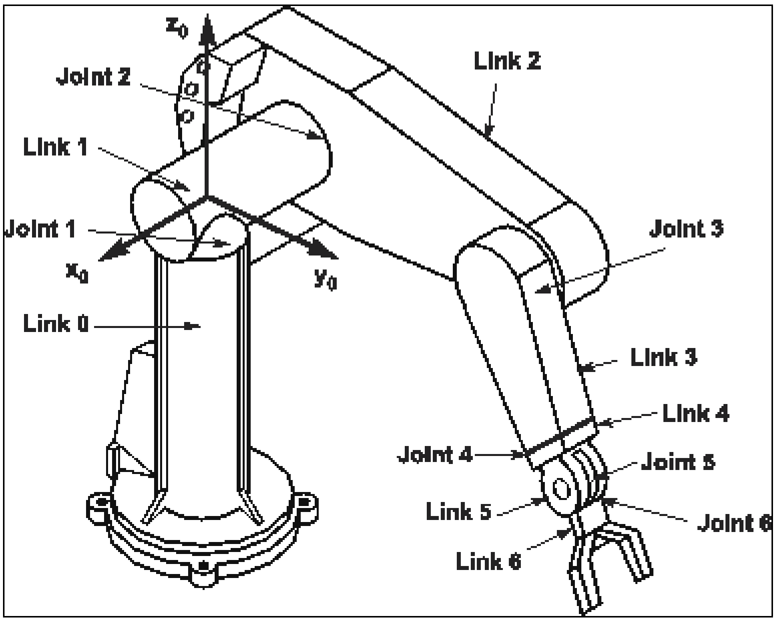

Fig. 3 - Figura 3-1

L'ultimo link di un robot manipolatore (Figura 3-1) è tipicamente costituito dalla pinza (o effettore) che permette quindi di manipolare (afferrare e lasciare) degli oggetti nello spazio. Una prima questione da porsi ora è quante coppie giunto/link siano indispensabili affinché sia possibile afferrare un qualunque oggetto nello spazio. I moderni robot industriali vengono progettati e costruiti per fare in modo che venga soddisfatta la seguente condizione: ogni punto dello spazio (di raggiungibilità) deve poter esser raggiunto dalla pinza con qualunque orientamento. Formulata la questione in questi termini è praticamente immediato afferrare l'analogia con il numero di gradi di libertà di un corpo rigido nello spazio, che sono 6. Infatti affinché un corpo rigido possa disporsi in una qualunque posizione dello spazio e in un qualunque orientamento servono 3 gradi di libertà di traslazione e altrettanti di rotazione: la pinza del robot manipolatore può essere quindi paragonata al suddetto corpo rigido. Di conseguenza, dal momento che ciascuna coppia giunto/link è in grado di fornire un grado di libertà, è possibile affermare che il numero di coppie necessarie a portare la pinza in un qualunque punto e con una qualunque rotazione sono 6, ovviamente se installate in modo opportuno (ovvero in modo che non esistano due giunti consecutivi che producono rotazioni attorno al medesimo asse), altrimenti anche in numero maggiore.

Fatte le dovute premesse, d'ora in poi in questa trattazione ci si riferirà sempre ad un robot manipolatore con 6 coppie giunto/link in grado di conferire tutti i 6 gradi di libertà alla pinza (si può tranquillamente far riferimento al robot in Figura 3-1).

La cinematica dei robot si divide in diretta e indiretta. Lo scopo della diretta è passare dalle variabili indipendenti dei giunti alle variabili cartesiane relative alla pinza (che è l'ultimo giunto). Questo problema presenta un'unica soluzione, infatti una volta fissati tutti i giunti in un certo modo, la posizione finale della pinza non può che essere unica. La risoluzione di questo problema può essere trattata in vari modi, ad esempio partendo dal primo giunto alla base del robot ed effettuando 6 cambi di sistema di riferimento. Alternativamente in casi semplici è anche possibile trovare soluzioni *ad hoc* sfruttando considerazioni di tipo geometrico, ma tipicamente questo non avviene nel caso a 6 gradi di libertà.

La cinematica inversa al contrario affronta il più ostico problema di ricavare le variabili di giunto necessarie a portare la pinza in una determinata posizione e con un certo orientamento (è il problema del controllo). Questo problema è in generale ben più complesso del precedente in quanto solitamente non è garantita né l'unicità né l'esistenza della soluzione finale. La soluzione può infatti non esistere qualora la posizione finale da raggiungere sia al di fuori dello spazio di raggiungibilità del robot. D'altro canto invece può accadere che esistano più soluzioni che portano alla medesima posizione finale (ma questo avviene tipicamente con più di 6 gradi di libertà, quindi non è il caso qui analizzato).

Un modo universale per trattare la cinematica dei robot è utilizzare la rappresentazione di Denavit–Hartenberg, la quale pur non essendo un metodo semplice è almeno universalmente applicabile. Questa rappresentazione in pratica fornisce un metodo per fissare i sistemi di riferimento sui giunti secondo un criterio prestabilito, in modo da poter poi applicare algoritmi universali che sfruttino tali convezioni. Il funzionamento di questa rappresentazione ed i relativi algoritmo non saranno spiegato in questa sede. Si menziona solo il fatto che essa in fase preliminare richiede la determinazione di quattro parametri per ciascuna coppia giunto/link (due relativi al giunto e due relativi al link) e che spesso il maggior ostacolo consiste proprio in questa fase. Per questo motivo, pur rimanendo essa una valida rappresentazione, esistono anche altre modalità e convenzioni.

3.2. Una rappresentazione più naturale con gli angoli di Eulero

La pinza (o effettore) del robot manipolatore è l'unica parte che effettivamente svolge l'interazione con gli oggetti circostanti. Con ciò non si interde che tutte le altre parti del robot sono di secondaria utilità ma semplicemente che, fatte le dovute ipotesi sul numero di gradi di libertà forniti dalle coppie giunto/link, è possibile per un attimo astrarre dalla complessità dell'intera macchina e concentrarsi solo sulla pinza: un corpo rigido nello spazio. Come detto essa deve poter raggiungere ogni parte dello spazio di raggiungibilità del robot con ogni orientamento possibile, e ciò equivale ad avere 3 gradi di libertà di traslazione ed altri 3 per la rotazione. L'idea che si vuole presentare consiste nel separare i primi 3 gradi di libertà (di traslazione) dagli ultimi (di rotazione). Questa rappresentazione porta delle notevoli semplificazioni, sia da un punto di vista di modellizzazione che di conseguenza del controllo. Inoltre questa modalità di rappresentazione si può considerare in un certo senso più naturale in quanto:

- i 3 gradi li libertà di traslazione sono paragonabili ad un braccio umano (dalla spalla fino alla giuntura del polso): il suo scopo è portare il polso in una qualunque posizione dello spazio di raggiungibilità;
- i 3 gradi di libertà rotazionali sono paragonabili al sistema polso/mano, il quale permette poi di raggiungere un qualunque orientamento nello spazio.

In modo più rigoroso, tramite questa rappresentazione è possibile descrivere la posizione completa dell'effettore nello spazio attraverso il vettore *v:*

$$v = \begin{bmatrix} p \\ \varphi \end{bmatrix}$$

dove:

- p € R3 rappresenta la posizione dell'effettore;
- φ rappresenta l'orientamento dell'effettore.

Il vettore p è costituito da una terna di valori reali e possiamo pensarlo come un punto nello spazio costituito dai valori x,y,z. Esistono infatti robot industriali, detti cartesiani appunto, che sfruttano proprio il movimento su tre assi ortogonali per raggiungere la posizione desiderata: per tali robot un input in questi termini sarebbe già sufficiente a portare la pinza nella posizione finale.

Il parametro φ invece deve essere una rappresentazione dell'orientamento dell'effettore. Essa dovrebbe essere una rappresentazione minimale, infatti una matrice di rotazione porterebbe degli inconvenienti (essendo ridondante bisogna aggiunger vincoli aggiuntivi, ovvero i vincoli di ortonormalità, per trovarla in modo univoco). La rappresentazione minimale dell'orientamento che si addice perfettamente a questo ruolo è ovviamente rappresentata dagli angoli di Eulero (o di Tait-Bryan).

Per utilizzare una terna di Eulero è necessario fissare i due soliti sistemi di riferimento, uno fisso (o assoluto) ed uno mobile, solidale però con lo stesso oggetto in rotazione. Per quanto riguarda il sistema di riferimento fisso ne esiste solitamente già uno collocato alla base del robot, ovvero alla base del primo link il quale, per ovvie ragioni, resta fisso. Esso è ovviamente usato anche come sistema di riferimento fisso per le operazioni di traslazione. Tuttavia si tenga anche presente che una possibile soluzione, per quanto riguarda il sistema di riferimento fisso per le rotazioni, potrebbe essere la base del quarto link, ovvero il punto in cui inizia il sistema polso/mano del robot: questo infatti rimane fisso dal punto di vista delle tre coppie giunto/link di rotazione. Tuttavia, dal momento che il nostro scopo è descrivere la rotazione della pinza relativamente allo spazio circostante, è meglio utilizzare il primo sistema di riferimento proposto, quello fisso alla base del robot, in modo anche da avere un unico sistema fisso sia per le operazioni di traslazione che di rotazione.

A questo punto bisogna solo decidere quale terna di Eulero o di Tait-Bryan utilizzare per rappresentare le rotazioni. Anziché sceglierne una qualunque, è possibile controllare se ne esiste una che rispecchia nel modo più naturale possibile il polso del robot. In un robot manipolatore gli ultimi tre giunti provvedono a fornire la rotazione finale della pinza attraverso tre rotazioni indipendenti ed ortogonali fra loro (l'analogia con gli angoli di Eulero è evidente). In Figura 3-2 è presente nella parte sinistra il solito robot manipolatore in cui sono messi in evidenza i tre assi di rotazione del sistema polso/mano; a destra invece è presente una rappresentazione schematica di tale sistema, chiamato infatti polso sferico.

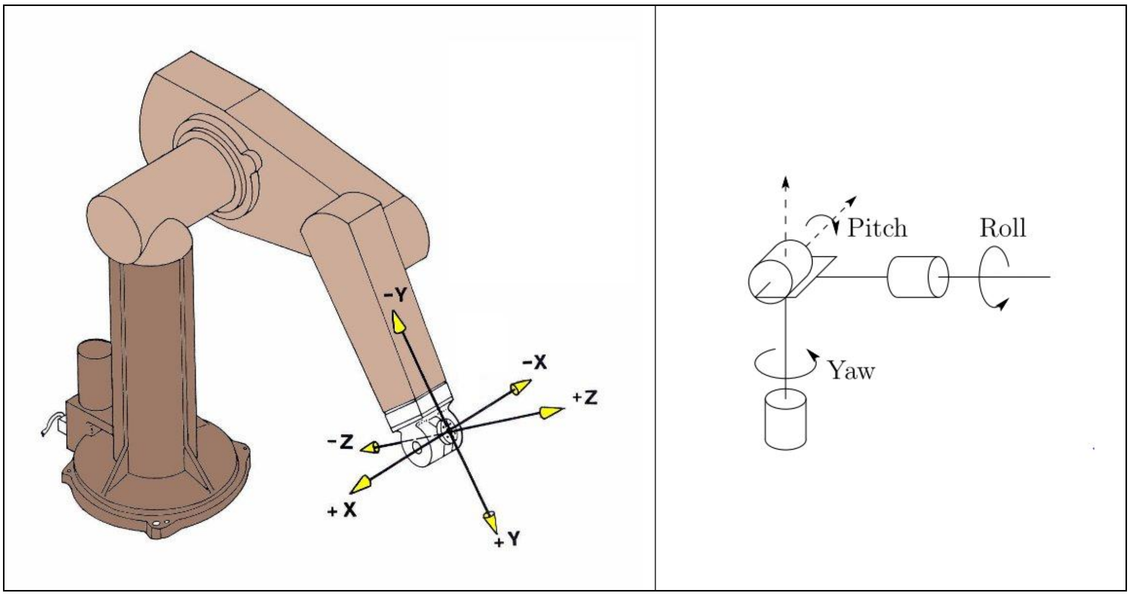

Fig. 4 - Figura 3-2

E' sufficiente prestare uno sguardo ai nomi degli angoli di rotazione del polso sferico per capire quale sia la terna di angoli di Eulero che più naturalmente si presta alla rappresentazione, ovvero una fra le terne di Tait-Bryan ad esempio y-x-z. Si rimarca il fatto che una qualunque altra terna andrebbe bene, una volta fissate le opportune premesse, per rappresentare l'orientamento della pinza. Quella proposta tuttavia si presta ad una rappresentazione facilmente apprendibile e risolve inoltre in modo naturale parte del problema del controllo. In pratica infatti conoscendo i tre angoli di rollio,beccheggio e imbardata della pinza da orientare, risulta estremamente immediato orientare correttamente il polso sferico in quanto adotta lo stesso concetto.

Si tenga infine presente che, dal momento che l'oggetto di questa trattazione sono gli angoli di Eulero, è stato considerato solamente il caso di un robot manipolatore con esattamente 6 gradi di libertà, di cui 3 indipendenti di traslazione e i rimanenti 3 sempre indipendenti di rotazione. In questo modo è risultato semplice e naturale effettuare la separazione fra posizione e orientamento. Si tenga semplicemente presente che esistono anche da un lato robot con un minor numero di gradi di libertà (e quindi certamente senza la possibilità di raggiungere ogni punto con un qualunque orientamento), mentre dall'altro lato ce ne sono anche con un numero maggiore di 6 (in questo caso risulta possibile raggiungere la medesima posizione e orientamento con più di una traiettoria, ma in questo caso entrano in gioco ben altre complessità). Per questi casi è comunque possibile utilizzare gli angoli di Eulero, ma bisognerà certamente fare altre considerazioni *ad hoc* sul caso specifico.

4. Appendice: un problema reale di conversione nelle coordinate del robot

In questo capitolo sarà analizzato, e si cercherà di risolvere, un problema che richiede la determinazione degli angoli di Eulero a partire da un numero finito di punti nello spazio. In realtà il problema reale che si vuole affrontare è il seguente:

Si ha a disposizione un robot manipolatore (del tipo in Figura 3-1)*, quindi con tutti i 6 gradi di libertà. Questo robot deve fungere da supporto ad un operatore umano il quale (non avendo a disposizione le proprie mani a causa del compito che sta svolgendo) lo può comandare muovendo la propria testa. Si vuole quindi fare in modo che, una volta fissati i sistemi di riferimento opportuni, l'effettore del robot manipolatore rifletta i movimenti della testa dell'operatore.*

Innanzitutto è chiaro che ci debba essere un flusso di informazioni, dall'operatore al robot, il quale avviene ad opera di sensori. Si supponga quindi di essere già in grado di ottenere le coordinate spaziali di un numero finito di punti fissati sulla testa dell'operatore. Infatti per risolvere semplicemente questo problema l'operatore indossa degli speciali occhiali su cui sono fissati dei led: una telecamera è poi in grado di rilevare questi led come semplici punti nello spazio. Quindi, fatte le dovute premesse, i problemi che si vogliono affrontare sono i seguenti:

1. Quanti punti (cioè led) devono essere rilevati dalla testa dell'operatore per poter risolvere il problema?
2. Come si può determinare la posizione e soprattutto l'orientamento (tramite gli angoli di Eulero) in cui deve portarsi l'effettore del robot?

Entrambi i punti saranno sviluppati nei due paragrafi seguenti.

4.1. Numero di punti necessari

Si è visto che il numero di gradi di libertà di un corpo rigido nello spazio sono 6. E' quindi possibile escludere a priori e per assurdo la possibilità di rilevare un solo punto, il quale comunque permetterebbe di rilevare almeno la posizione del corpo. Con un solo punto quindi mancherebbe completamente l'informazioni relativa all'orientamento.

Si analizza ora il caso in cui vengono rilevati 2 punti. Una prima considerazione è la seguente: rilevando due punti nello spazio si ottengono ben 6 misurazioni (2 valori per ogni asse), numero che eguaglia i gradi di libertà di un corpo nello spazio, dunque ad una prima ed affrettata analisi sembrerebbero sufficienti. Tuttavia bisogna accertarsi che questi 6 punti siano indipendenti, in quanto solo in questo caso il problema sarebbe risolto. La risposta è negativa, ovvero le misurazioni non sono affatto indipendenti in quanto la distanza fra i due punti si mantiene costante, il che significa algebricamente che una relazione è fissata da questo vincolo. Di conseguenza con 2 punti è possibile rilevare solo 5 gradi di libertà, infatti si perde totalmente l'informazione relativa alla rotazione attorno all'asse passante per i due punti stessi. Si noti che per alcuni problemi questo potrebbe comunque bastare, eventualmente disponendo i punti da rilevare in modo che si perda l'informazione relativa all'asse attorno al quale non avvengono rotazioni (o comunque sono trascurabili). Comunque dal momento che ci si è proposti di rilevare tutti i 6 gradi di libertà del corpo nello spazio, nemmeno con 2 punti è possibile risolvere il problema in modo esauriente.

Si esamina quindi il caso in cui vengono rilevati 3 punti. Il numero di misurazioni ricevute in questo caso è ben 9, ma ciò che conta è il numero di variabili effettivamente indipendenti. Anche in questo caso i 3 punti sono soggetti al vincolo relativo delle distanze fisse, ed in questo caso ci sono tre distanze fisse. Detti infatti P1,P2 e P3 i punti rilevati, si mantengono costanti le distanze P1-P2, P2-P3 e P1-P3. Di conseguenza il numero di gradi di libertà effettivamente misurabili, ovvero il numero di variabili indipendenti, è pari a 6 (9 misurazioni - 3 vincoli sulle distanze). Dunque con tre punti è finalmente possibile disporre dell'informazione sufficiente a determinare posizione e orientamento del corpo rigido. Si presti però attenzione alla scelta dei 3 punti, infatti sussiste la seguente condizione da rispettare: devono essere disposti in modo che non siano allineati, altrimenti ci si troverebbe in un caso equivalente a quello con soli due punti (il punto nel mezzo infatti non porta alcuna informazione aggiuntiva che non sia già ricavabile dagli altri due).

Si è giunti dunque alla conclusione che per ricavare l'orientamento e la posizione della testa dell'operatore siano necessari 3 punti non allineati. Dal momento che si è detto in principio che i led per la rilevazione sono posizionato su occhiali indossati dall'operatore, una possibile soluzione è rappresentata in Figura 4-1. Si noti che il led centrale (L3) è applicato alla barra in alto per fare in modo non sia allineato agli altri due.

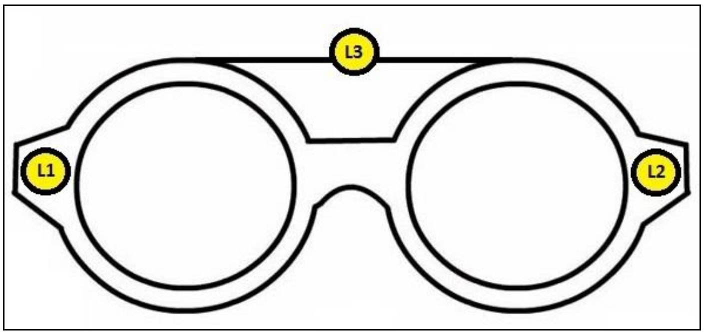

Fig. 5 - Figura 4-1

Analizzando questo punto si è inoltre capito che è impossibile fornire una rappresentazione che sia minimale attraverso l'uso di punti fissi sul corpo stesso: con 2 punti infatti non c'è abbastanza informazione, mentre con 3 abbiamo una rappresentazione che è si sufficiente ma ridondante (siamo infatti costretti a misurare 9 valori anziché 6). Questo è, fra gli altri, uno dei motivi per cui la rappresentazione minimale tramite posizione e orientamento con gli angoli di Eulero sia vincente. Nel punto successivo sarà proprio mostrato come convertire i tre punti nella suddetta rappresentazione minima.

4.2. Conversione nelle coordinate del robot

La conversione nelle coordinate del robot si suddivide in più punti. Innanzitutto saranno ricavate le coordinate della posizione dell'effettore in modo molto semplice, per poi passare alla seconda parte più ostica di rilevazione dell'orientamento. Si tenga d'ora in poi presente che, dal momento che i 3 led (L1, L2, L3) vengono effettivamente rilevati dal sensore come 3 punti nello spazio, d'ora in poi si farà riferimento ad essi come semplici punti geometrici. Inoltre identifichiamo ciascuna delle tre componenti di ogni punto con il nome dell'asse cartesiano a pedice, ad esempio il punto L1 è rappresentato dalla seguente terna:

$$L1 = (L1x, L1y, L1z) .$$

Si procede quindi alla determinazione della posizione. Per quanto riguarda questo punto è sufficiente adottare una convenzione, ovvero bisogna scegliere un punto degli occhialini che rappresenta la posizione in cui dovrà portarsi l'effettore del robot. Si è deciso di scegliere ragionevolmente il punto centrale degli occhiali, il quale è fra l'altro facilmente ricavabile trovando il punto intermedio fra L1 ed L2, rappresentato come punto P in Figura 4-2.

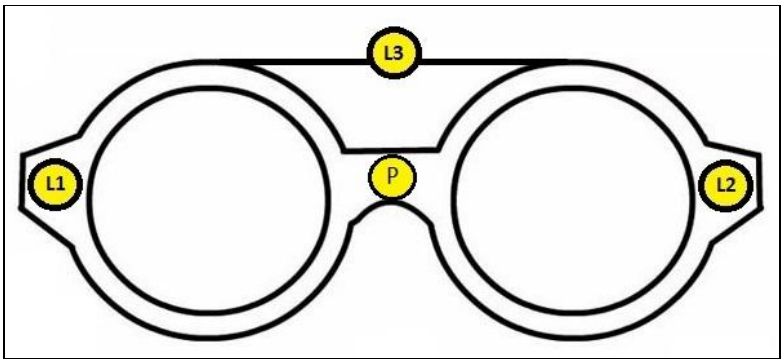

Fig. 6 - Figura 4-2

Le coordinate di P sono facilmente ricavabili da L1 ed L2 nel seguente modo:

$$P = \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L1x + L2x}{2} \\ \frac{L1y + L2y}{2} \\ \frac{L1z + L2z}{2} \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda la posizione è sufficiente quanto visto sopra; si passa quindi alla rilevazione dell'orientamento. Si tenga presente che si vuole fornire al robot una rappresentazione minimale, quindi tramite gli angli di Eulero, tuttavia prima di arrivare a ciò bisognerà passare da altre rappresentazioni intermedie come la matrice di rotazione. Questa complicanza deriva dal fatto che inizialmente l'informazione di cui si dispone è composta da 3 punti, i quali non permettono una conversione facile e diretta di una delle terne di angoli di Eulero.

La prima cosa da fare è fissare un sistema di riferimento solidale con l'occhiale: si è deciso di adottare una convenzione in cui l'origine degli assi coincide con il punto L1 e i tre assi ortogonali sono di conseguenza disposti come mostrato in Figura 4-3.

Ora si procede cercando di convertire i tre punti in una rappresentazione dell'orientamento del corpo rigido chiamata SORA (Simultaneous Orthogonal Rotations Angle). In breve la notazione SORA esprime l'orientamento di un corpo rigido tramite 3 valori di rotazioni simultanee attorno ai 3 assi ortogonali nello spazio. Si presti particolare attenzione alla differenza sostanziale con gli angoli di Eulero, i quali forniscono 3 rotazioni da eseguire in sequenza una dopo l'altra. Si faccia riferimento alla Figura 4-4: nella parte sinistra è rappresentato l'orientamento di un generico corpo rigido tramite 3 rotazioni simultanee attorno ai 3 assi ortogonali di un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso. A destra invece è presente l'analogia con il caso in analisi: si vogliono trovare i 3 angoli di rotazione (simultanee) attorno agli assi X, Y, Z del sistema di riferimento fisso, in modo tale da portarlo a coincidere con il sistema di riferimento mobile degli occhialini (X', Y', Z').

Disponendo delle informazioni sui 3 punti è sempre possibile (dal momento che non sono allineati) ricavare le 3 rotazioni utilizzando operazioni trigonometriche e facendo uso della funzione matematica atan2, definita nel seguente modo [1]:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Atan2

For any real number arguments x and y not both equal to zero, atan2(y, x) is the angle in radians between the positive x-axis of a plane and the point given by the coordinates(x, y) on it. The angle is positive for counter-clockwise angles (upper half-plane, y > 0), and negative for clockwise angles (lower half-plane, y < 0).

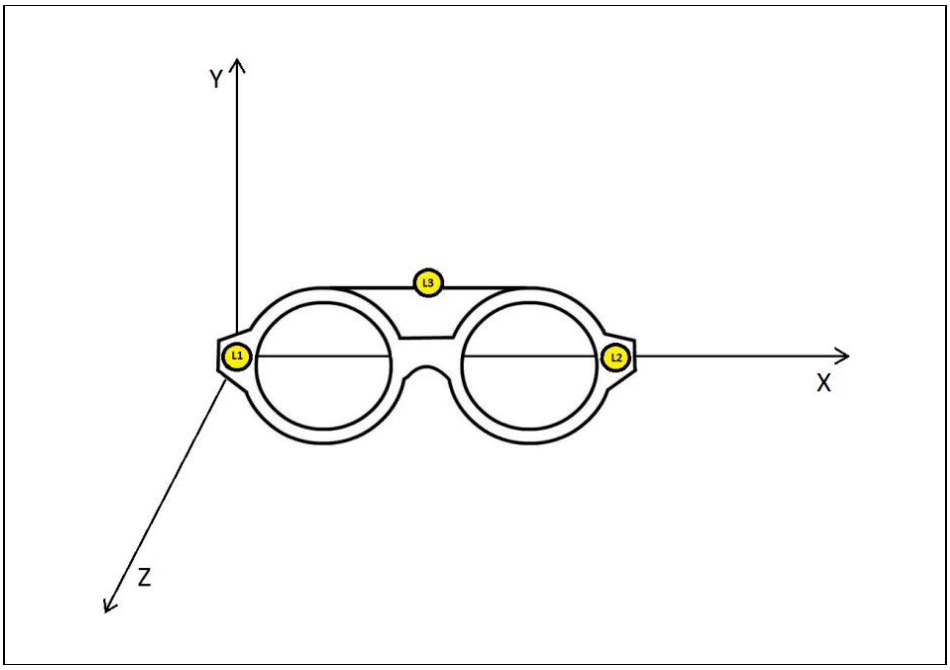

Fig. 7 - Figura 4-3

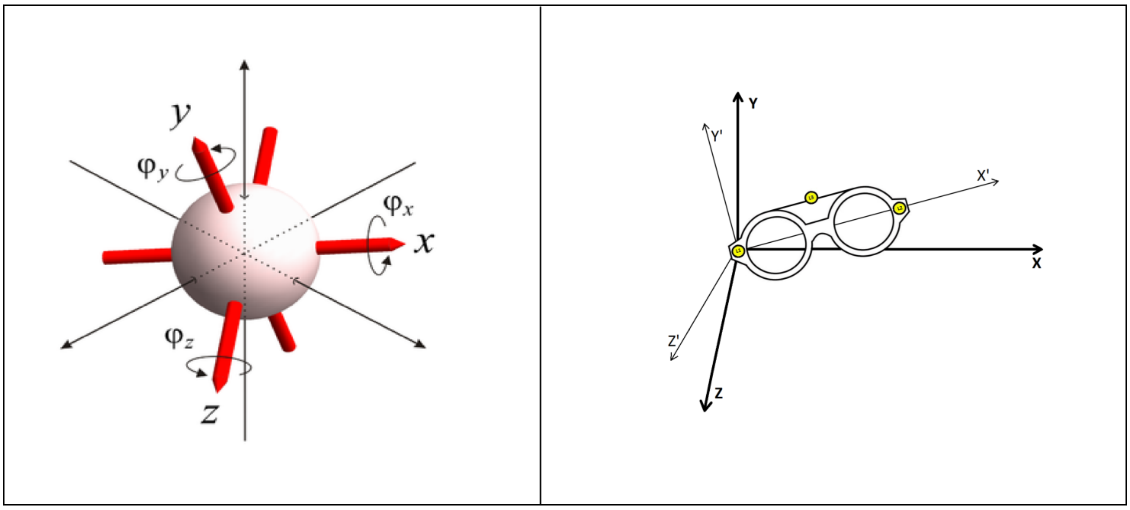

Fig. 8 - Figura 4-4

Si procede quindi mostrando come calcolare l'angolo di rotazione attorno all'asse Z, detto φ_z, supponendo per semplicità che la rotazione avvenga solamente attorno a tale asse. Tenendo presente che il sistema di riferimento per la rotazione è solidale con l'occhiale ed è centrato in L1, è sufficiente considerare L1 e un'altro degli altri due punti, L2 in questo caso, per calcolare l'angolo di rotazione. Si consideri l'immagine in Figura 4-5 in cui l'asse di rotazione Z è uscente dalla pagina.

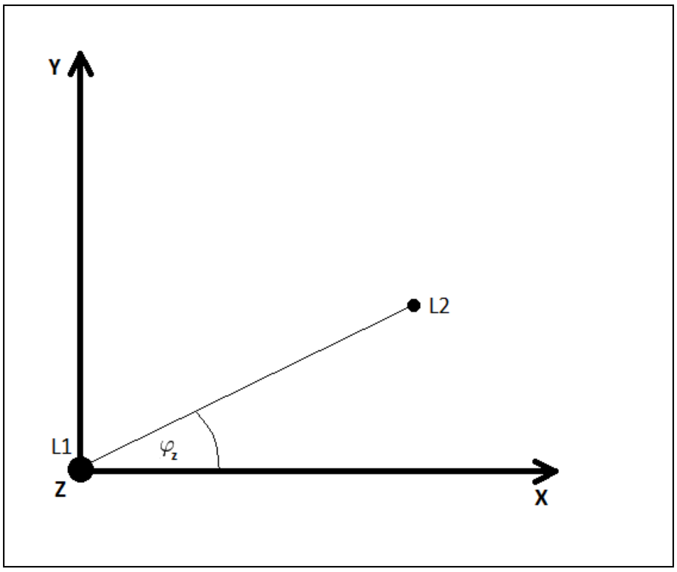

Fig. 9 - Figura 4-5

Prima di calcolare l'angolo bisogna considerare una semplice operazione di traslazione del sistema di riferimento in modo tale che il punto L1 coincida con l'origine del sistema, dal momento che le misurazioni del sensore sono date in modo assoluto. Per fare questo sarebbe sufficiente effettuare le seguenti trasformazioni sulle coordinate:

$$(L1x, L1y, L1z) \text{ diventa } (0,0,0)$$

$$(L2x, L2y, L2z) \text{ diventa } (L2x - L1x, L2y - L1y, L2z - L1z).$$

Il valore dell'angolo l'angolo φ_z, alla luce della suddetta considerazione, è dato dalla formula

$$\varphi_z = atan2(L2y - L1y\ ,\ L2x - L1x)$$

in cui le coordinate dei punti L1 e L2 sono riferite alle misurazioni fornite dal sensore (il cambio di base avviene implicitamente sottraendo alla componente di L2 la relativa componente di L1).

Per quanto riguarda i valori di rotazione lungo gli altri due assi si procede ovviamente in modo perfettamente analogo. Bisogna però considerare il fatto che è necessario considerare l'informazione di tutti i 3 punti. Si consideri a tal proposito una rotazione pura attorno all'asse X (si faccia riferimento alla Figura 4-3). In questo caso infatti non possono essere utilizzati i due punti L1 ed L2 in quanto sono allineati con lo stesso asse di rotazione e non portano quindi alcuna informazione (d'altro canto se così non fosse non avremmo dimostrato precedentemente che servono ben 3 punti per risolvere il problema). Tuttavia è sufficiente mantenere fisso il punto L1, essendo l'origine del sistema di riferimento, ed utilizzare L3 (anziché L2) come secondo punto. Per quanto riguarda la rotazione attorno a Y invece si può ancora utilizzare il punto L2. Quindi l'unico valore di rotazione per cui bisogna cambiare punto è l'asse X in quanto L1 ed L2 sono allineati con esso.

Riassumendo quindi, le regole trovate per il calcolo dei 3 angoli di SORA si possono schematizzare nel seguente modo:

$$\varphi_z = atan2(L2y\text{-}L1y\ ,\ L2x\text{-}L1x)$$
$$\varphi_y = atan2(L2x\text{-}L1x\ ,\ L2z\text{-}L1z)$$
$$\varphi_x = atan2(L3z\text{-}L1z\ ,\ L3y\text{-}L1y)$$

Come detto precedentemente, le coordinate dei punti nelle formule si riferiscono a quelle assolute fornite dal sensore.

Si torna ora all'obiettivo intermedio che ci si era posti: calcolare la matrice di rotazione relativa alle 3 rotazioni simultanee trovate. Fortunatamente viene incontro il teorema di rotazione di Eulero, il quale afferma che [2]:

un qualunque orientamento nello spazio può essere rappresentato tramite una singola rotazione attorno ad uno specifico asse (non necessariamente X,Y o Z).

In altre parole il teorema garantisce sempre l'esistenza di un versore V (asse di rotazione) e di un angolo ϕ che permettono di raggiungere un qualunque orientamento del corpo rigido. Fortunatamente tramite semplici formule, che non saranno qui dimostrate per ovvi motivi, è possibile ricavare V e ϕ e successivamente calcolare la relativa matrici di rotazione. Il procedimento è mostrato sotto.

Una volta trovati φ_x , φ_y e φ_z , le formule per trovare V e ϕ sono le seguenti [3]:

$$V = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}} \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}$$

$$\phi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$$

A questo punto si utilizza la generica formula che fornisce la matrice di rotazione attorno ad un asse qualunque [4]:

$$R(V, \phi) = \begin{bmatrix} C\phi + v_x^2(1-C\phi) & v_x v_y(1-C\phi) - v_z S\phi & v_x v_z(1-C\phi) + v_y S\phi \\ v_y v_x(1-C\phi) + v_z S\phi & C\phi + v_y^2(1-C\phi) & v_y v_z(1-C\phi) - v_x S\phi \\ v_z v_x(1-C\phi) - v_y S\phi & v_z v_y(1-C\phi) + v_x S\phi & C\phi + v_z^2(1-C\phi) \end{bmatrix}$$

Ora che si dispone della matrice di rotazione resta solo da effettuare la conversione in una terna di angoli di Eulero. Per fare ciò si rimanda il lettore al capitolo 2 (2.4.2 Convertire dalla matrice di rotazione alla terna di Eulero). Si tenga comunque ben presente che prima di effettuare quest'ultima conversione è necessario sapere a priori a quale terna di Eulero o di Tait-Bryan si intende far riferimento: questo dipende molto probabilmente dal robot utilizzato.

In conclusione, finalmente si dispone di una tecnica che permettere all'effettore del robot di riprodurre i movimenti degli occhiali indossati dall'operatore a partire dalle informazioni ricavate dai tre led. La rappresentazione fornita è inoltre minimale in quanto utilizza un singolo punto per posizionare l'effettore nello spazio ed una terna di angoli di Eulero per orientarlo correttamente, per un totale quindi di 6 parametri (indipendenti) ad indicare i 6 gradi di libertà dell'effettore.

---

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_rotation_theorem

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Axis_angle#Simultaneous_orthogonal_rotation_angle

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#Rotation_matrix_from_axis_and_angle

Bibliografia

Libri:

[1] M. Spong, S. Hutchinson e M. Vidyasagar, Robot Modeling And Control, Wiley, 2005 .

[2] G. Gini e V. Caglioti, Robotica, Milano: Zanichelli, 2003.

Pagine web:

[3] «Euler Angles» [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles.

[4] «Maths - Euler Angles,» [Online]. Available: http://www.euclideanspace.com/maths/geometry/rotations/euler/.

[5] «Angoli di Eulero,» [Online]. Available: http://it.wikipedia.org/wiki/Angoli_di_Eulero.

[6] «Robotics Kinematics and Dynamics/Description of Position and Orientation,» [Online]. Available: http://en.wikibooks.org/wiki/Robotics_Kinematics_and_Dynamics/Description_of_Position_and_Orientation#Euler_Angles.

[7] R. Cassinis, «Lucidi del corso Robotica (Università degli studi di Brescia, dip. Ingegneria),» [Online]. Available: http://www.ing.unibs.it/~cassinis/Dida/.

[8] L. Zaccarian, «Dispense del corso di Robotica (Università degli studi di Roma),» [Online]. Available: http://control.disp.uniroma2.it/zack/LabRob/dispense.pdf .

[9] «Atan2,» [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Atan2

[10] «Euler's rotation theorem,» [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_rotation_theorem.

[11] «Axis–angle representation,» [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Axis_angle#Simultaneous_orthogonal_rotation_angle.

[12] «Rotation Matrix,» [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix#Rotation_matrix_from_axis_and_angle.

[13] «Euler's rotation theorem,» [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_rotation_theorem .

Indice